

**Simulare examen de bacalaureat**  
**Proba scrisă la Matematică M2 profil științele naturii**

- Toate subiectele sunt obligatorii. Se acordă 10 puncte din oficiu.
- Timpul de lucru efectiv este de 3 ore. La toate subiectele se cer rezolvări complete.

**SUBIECTUL I**

**(30 puncte)**

- 5p** 1. Calculați suma  $1 + 5 + 9 + \dots + 61$
- 5p** 2. Se consideră funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f(x) = 2x - 4$ . Să se calculeze  $(f \circ f)(3)$ .
- 5p** 3. Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația  $2^{x+2} + 2^{x+1} + 2^x = 7$ .
- 5p** 4. Să se calculeze probabilitatea ca, alegând un număr natural de două cifre, acesta să fie pătrat perfect.
- 5p** 5. Fie punctele  $A(4,0), B(2,3)$  și  $C(-1,-2)$  vârfurile unui triunghi. Determinați lungimea mediane dusă din vârful  $A$ .
- 5p** 6. Fie  $\alpha \in \left(\pi, \frac{3\pi}{2}\right)$ , astfel încât  $\cos \alpha = -\frac{5}{13}$ . Să se calculeze  $\sin \alpha$ .

**SUBIECTUL II**

**(30 puncte)**

1. Fie sistemul de ecuații 
$$\begin{cases} x + y + z = 1 \\ x + 2y + az = 1 \\ x + 4y + a^2z = 1 \end{cases}, a \in \mathbb{R} \text{ și matricea } A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & a & a^2 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$
- 5p** a) Să se calculeze  $\det(A(4))$ .
- 5p** b) Să se determine  $a \in \mathbb{R}$  pentru care matricea  $A(a)$  este inversabilă.
- 5p** c) Pentru  $a \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ , să se rezolve sistemul.
2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție  $x * y = (x - 4)(y - 4) + 4$ .
- 5p** a) Să se determine elementul neutru al legii de compoziție.
- 5p** b) Să se rezolve în mulțimea numerelor reale ecuația  $x * x * x = x$ .
- 5p** c) Să se determine două numere  $a, b \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ , astfel încât  $a * b \in \mathbb{Q}$ .

**SUBIECTUL III**

**(30 puncte)**

1. Se consideră funcțiile  $f_n: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , date prin  $f_0(x) = e^{-x} - 1$  și  $f_{n+1}(x) = f'_n(x)$  pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $f_1(x)$ .
- 5p** b) Să se determine ecuația asimptotei orizontale către  $+\infty$  a graficului funcției  $f_0$ .
- 5p** c) Să se calculeze  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x) + x - 1}{x^2}$ .
2. Se consideră pentru orice număr natural  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{x+2} dx$ .
- 5p** a) Să se calculeze  $I_2$
- 5p** b) Să se demonstreze ca  $I_{n+1} + 2I_n = \frac{1}{(n+1)}, \forall n \in \mathbb{N}^*$ .
- 5p** c) Utilizând, eventual, inegalitatea  $\frac{1}{3} \leq \frac{1}{x+2} \leq \frac{1}{2}, \forall x \in [0, 1], n \in \mathbb{N}^*$  să se demonstreze că 
$$\frac{1}{3} \leq 2013 \cdot I_{2012} \leq \frac{1}{2}.$$

**Simulare examen de bacalaureat 2013**  
**Proba scrisă la Matematică M2 profil științele naturii**

**SUBIECTUL I**

1.	$a_1 = 1, r = 4, n = 16$ $S_{16} = \frac{(1+61)16}{2} = 496$	3p 2p
2.	$f(3) = 2$ $f(f(3)) = 0$	2p 3p
3.	$2^x(4+2+1) = 7$ $2^x = 1 \Rightarrow x = 0$	2p 3p
4.	Nr. cazuri posibile = 90 Nr. cazuri favorabile = 7 $p = \frac{7}{90}$ gresit	1p 2p 2p
5.	$M\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ mijlocul laturii $BC$ $AM = \sqrt{\left(4 - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(0 - \frac{1}{2}\right)^2} = \frac{5}{2}$ gresit	2P 3p
6.	$\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha}$ $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \frac{25}{169}} = -\frac{12}{13}$	2p

**SUBIECTUL II**

1 a)	$\det(A(a)) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix} = 6$	5p
b)	$A(a)$ inversabila $\Leftrightarrow \det A(a) \neq 0$ $(a-1)(a-2) = 0 \Rightarrow a \in \{1, 2\}$ $a \in \square \setminus \{1, 2\}$	2p 2p 1p
c)	$d_x = (a-1)(a-2), d_y = 0, d_z = 0$ $x = 1, y = 0, z = 0$	3p 2p
2 a)	$\exists e \in \square, x * e = e * x = x, \forall x \in \square$ $e = 5$	2p 3p
b)	$x * x = (x-4)^2 + 4$ $x * x * x = (x-4)^3 + 4$ $x * x * x = x \Rightarrow (x-4)^3 = x-4 \Rightarrow x_1 = 4, x_2 = 3, x_3 = 5$	1p 1p 3p
c)	De exemplu, $a = \frac{1}{2}, a * b = 1$ $\left(\frac{1}{2} - 4\right)(b-4) + 4 = 1 \Rightarrow b = \frac{34}{7}$	3p 2p

**SUBIECTUL III**

1a)	$f_1(x) = (f_0(x))' = -e^{-x}$	5p
b)	$\lim_{x \rightarrow \infty} f_0(x) = -1 \Rightarrow y = -1$ asimptota orizontala	5p
c)	$f_2(x) = (f_1(x))' = e^{-x}$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_2(x) + x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x} + x - 1}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(e^{-x} + x - 1)'}{(x^2)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{-e^{-x} + 1}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-x}}{2} = \frac{1}{2}$	2p 3p
2 a)	$I_2 = \int_0^1 \frac{x^2}{x+2} dx = \int_0^1 \frac{x^2 - 4 + 4}{x+2} dx = \int_0^1 x - 2 + \frac{4}{x+2} dx = \left( \frac{x^2}{2} - 2x + 4 \ln(x+2) \right) \Big _0^1 =$ $= 4 \ln \frac{3}{2} - \frac{3}{2}$	5p
b)	$\int_0^1 \frac{x^{n+1}}{x+2} + \frac{2x^n}{x+2} dx = \int_0^1 \frac{x^n(x+2)}{x+2} dx = \int_0^1 x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big _0^1 = \frac{1}{n+1}$	5p
c)	$\frac{x^{2012}}{3} \leq \frac{x^{2012}}{x+2} \leq \frac{x^{2012}}{2} \Rightarrow \frac{1}{3} \cdot \frac{x^{2013}}{2013} \Big _0^1 \leq I_{2012} \leq \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{2013}}{2013} \Big _0^1 \Rightarrow \frac{1}{3} \leq 2013 \cdot I_{2012} \leq \frac{1}{2}$	5p